Schwingungen u. Wellen I

Rückstellkraft $F = -k \cdot u$ u = Auslenkung

$$m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + k \cdot u = 0$$ Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$\underset{\text{Elongation}}{u(t)} = \underset{\text{Amplitude}}{u_0} \cdot \sin(\underset{\text{Kreisfrequenz}}{\omega_0} t + \varphi_0)$$ Phasenwinkel

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ Periodendauer

u_0, φ_0 gg. durch Anfangsbedingungen

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ Frequenz $[f] = \frac{1}{s} = Hz$

$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ Eigenfrequenz d. harmonischen Oszillators

$$E = \underbrace{\frac{m}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2}_{E_{kin}} + \underbrace{\frac{k}{2}u^2}_{E_{pot}} = const$$

Drehschwg

rücktreibendes Drehmoment $M = -D\varphi$ auf Trägheitsmoment J

D: Winkelrichtgröße

verursacht Winkelbeschl. $M = J\alpha = J\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ → $J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = 0$

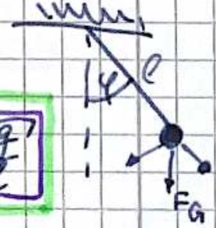
Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}}$

Pendelschwg

$M = -m \cdot g \cdot l \sin(\varphi) \neq -const \cdot \varphi$

$\sin\varphi \approx \varphi$ → $M = -\underbrace{m \cdot g \cdot l}_{D} \cdot \varphi$

$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$



Schwingungen und Wellen II

gedämpfte Swg: Energieverlust, z.B. durch Reibung

$$\boxed{F_{Dämpf} = -\beta \frac{du}{dt}}$$

(z.B. Stokes-Reibung, Wirbelstrombremse)

$$\boxed{m\frac{d^2u}{dt^2} + \beta\frac{du}{dt} + k\cdot u = 0}$$

DGL d. gedämpften Swg

$$\boxed{u(t) = u_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boxed{\delta = \frac{\beta}{2m}}$$ Dämpfungskonst.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{2\pi}{T}}$$ $(\omega < \omega_0)$

Amplitude Änderung $$\boxed{\frac{u(t+T)}{u(t)} = e^{-\delta T}}$$

① Energetisch für schwache Dämpfung ($\delta \ll \omega_0$):

Energie: $\boxed{E = \frac{k}{2}(u_0 \cdot e^{-\delta t})^2 = \frac{k}{2} u_0^2 e^{-2\delta t}}$

Verlust: $\boxed{-\frac{dE}{dt} = -\frac{k}{2} u_0^2 (-2\delta) e^{-2\delta t} = 2\delta E}$

Güte des Oszillators $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\delta}}$ $\boxed{Q = \frac{2\pi \cdot \text{Energie}}{\text{Energieverlust pro Periode}}}$

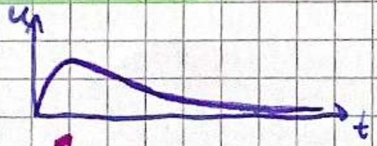
Federpendel: $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \sqrt{\frac{m\cdot k}{\beta}}}$

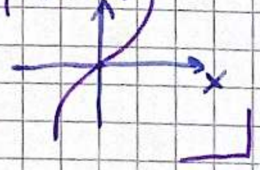
② Starke Dämpfung $\delta > \omega_0$

$\rightarrow \omega_0^2 - \delta^2 < 0 \rightarrow \boxed{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = i\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$

Mit $\sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$:

$$\boxed{u(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta t} \cdot \sinh(\sqrt{\delta^2 - \omega^2}\, t)}$$



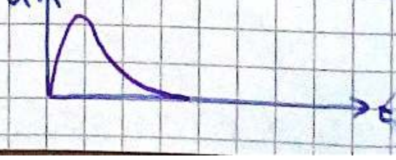


Kriechfall

③ Grenzfall $\delta = \omega_0$ (aperiodisch)

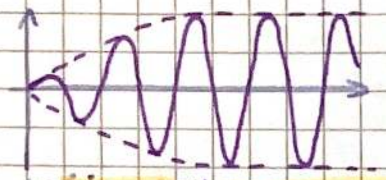
$$\boxed{u(t) = v_0 \cdot e^{-\delta t} \frac{\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t)}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = v_0 t e^{-\delta t}}$$

$(\sin x \approx x)$



Schwingungen u. Wellen III

Erzwungene Swng: permanente, unveränderliche Anregung des Oszillators (= Resonator)



→ Eigenfrequenz f_0

→ Phasenverschiebung zum Anreger $\varphi = \frac{\pi}{2}$

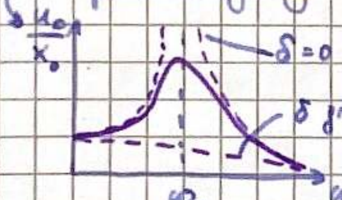
$$\boxed{m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + ku = kx}$$

DGL

Trägheit, Dämpfung, Rückstellkraft, äußere Kraft

$$\boxed{u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)}$$

Amplitudengang:



Amplitude

$$\boxed{\frac{u_0}{x_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\delta\omega)^2}}}$$

Amplitude der Anregung

- $\omega \ll \omega_0$: System in Phase mit Anregung $u_0 \approx x_0$
- $\omega \approx \omega_0$: Resonanz: Amplitude u_0 sehr groß, $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$
- $\omega \gg \omega_0$: $u_0 \to 0$ $\varphi \to \pi$

$P = F \cdot v$

- $F = k \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t)$
- $v = \frac{du}{dt} = u_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = u_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$

$\boxed{P > 0}$ → Anregung „pumpt" ständig Energie ins System

$\delta \to 0$ ⇒ Resonanzkatastrophe

Überlagerung harmonischer Swgs

zwei Anregungen, ungestörte Superposition, gleiche Amplitude

$$\boxed{u_1 = u_0 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

$$\boxed{u_2 = u_0 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$\boxed{u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}$$

$$\boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$\Delta\omega := \omega_1 - \omega_2$, $\Delta\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$, $\bar{\omega} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\bar{\varphi} := \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$

$$\boxed{u = 2u_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})}$$ → nicht harmonisch im Allg.

- gleiche Frequenz ($\Delta\omega = 0$)

$$\boxed{u = \underbrace{2u_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \cdot \sin(\omega t + \bar{\varphi})}$$ → harmonisch

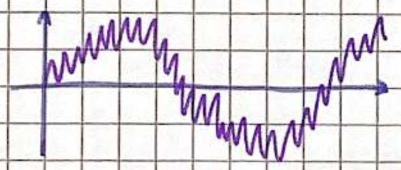
neue Amplitude
→ hängt von Phasendifferenz ab

- $\boxed{\Delta\varphi = \pm 2\pi k}$ $k \in \mathbb{N}_0$
  → Amplitude max, konstruktiv
- $\boxed{\Delta\varphi = \pm(2k-1)\pi}$ $k \in \mathbb{N}$
  → Amplitude 0, destruktiv

- verschiedene Frequenzen ($\omega_1 \neq \omega_2$)

für $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ⇒ $\boxed{u(t) = 2u_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin(\bar{\omega} t)}$ → nicht harmonisch

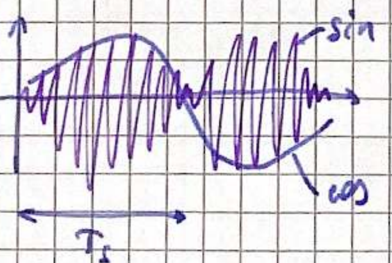
▷ $\omega_1 \gg \omega_2$



▷ $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \bar{\omega}$ → $\Delta\omega$ klein

$\sin(\bar{\omega} t)$ ändert sich schnell

$\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$ ändert sich langsam



Schwebung

$$\boxed{f_{Schwebung} = f_1 - f_2} \quad \left(= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{T_S}\right)$$

Fourier-Reihen

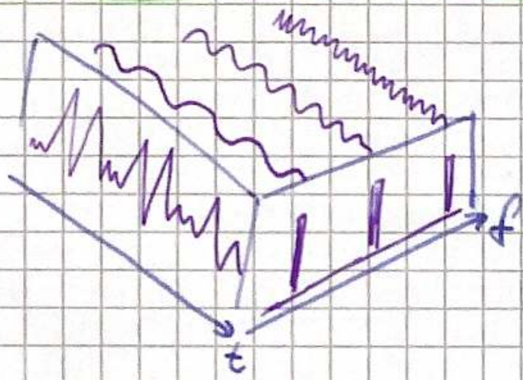
Jede anharmonische periodische Schwg $u(t) = u(t+T)$ lässt sich in eine Summe harmonischer Teilschwg zerlegen

→ Fourier-Reihe

$$\boxed{u(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sin(n\omega t + \varphi_n)}$$

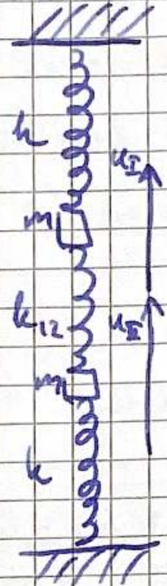
$$\boxed{u(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cos(n\omega t)\, dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u(t) \sin(n\omega t)\, dt \\ u_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n} \end{aligned}}$$



Gekoppelte Schwgs

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2 u_I}{dt^2} + k u_I + k_{12}(u_I - u_2) = 0 \\ m\dfrac{d u_{II}}{dt} + k u_{II} + k_{12}(u_2 - u_1) = 0 \end{cases}$$



→ gekoppelte DGL

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}(u_I + u_{II}) + \dfrac{k}{m}(u_I + u_{II}) = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(u_I - u_{II}) + \dfrac{k+2k_{12}}{m}(u_I - u_{II}) = 0 \end{cases}$$

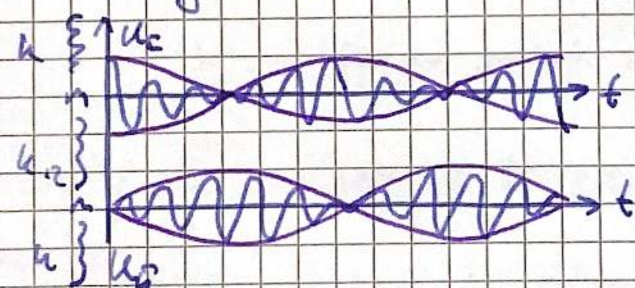
$$\left.\begin{matrix} u_1 := u_I + u_{II} \\ u_2 := u_I - u_{II} \end{matrix}\right\} \text{harmonische Schwgs} \begin{cases} \boxed{\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}} & \text{gleichphasig} \\ \boxed{\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k_{12}}{m}}} & \text{gegenphasig} \end{cases}$$

Bsp.: $u_I(0) = u_m$, $u_{II}(0) = 0$, $\dfrac{du_I}{dt} = \dfrac{du_{II}}{dt} = 0$ → $u_1(0) = u_2(0) = u_m$, $\dfrac{du_1}{dt} = \dfrac{du_2}{dt} = 0$

→ $u_1 = u_m \cos(\omega_1 t)$, $u_2 = u_m \cos(\omega_2 t)$

$$\rightarrow \begin{cases} u_I = \dfrac{u_1+u_2}{2} = \dfrac{u_m}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = u_m \cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \\ u_{II} = \dfrac{u_1-u_2}{2} = \dfrac{u_m}{2}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = u_m \sin\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \end{cases}$$

▸ kleine Kopplung k_{12}: $\omega_1 \approx \omega_2$



Wellen I

Welle: viele gekoppelte Oszillatoren,
breitet sich aus mit Wellengsw c

harmonische Auslenkung bei $x=0$: $\boxed{u(t,0) = u_0 \sin(\omega t + \varphi_0)}$

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Auslenkung bei x zur Zeit t = Ort $x=0$ zur Zeit $t - \frac{x}{c}$

$$\boxed{u(t,x) = u_0 \cdot \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right)}$$

harmonische Welle

c: Phasengsw

$\boxed{c = f\lambda}$

zeitliche Periodizität $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ $\rightarrow$ räumliche Periodizität

$\boxed{cT = \lambda}$: Wellenlänge

$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ Wellenzahl, dann $\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi}\lambda = f\lambda}$

$\rightarrow \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = \omega t - \omega\frac{x}{c} = \omega t - kx$

$\rightarrow \boxed{u(t,x) = u_0 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)}$

partielle Ableitung

$\boxed{\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}}$

Ableitung nach x bei $t = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -k \cdot u_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 \cdot u_0 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = -k^2 u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega\, u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot u_0 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = -\omega^2 u$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Wellengleichung

Wellen II

Transversalwelle: Ausl. u $\perp$ Ausbreitungsrichtung
Longitudinalwelle: Ausl. u $\parallel$ Ausbreitungsrichtung

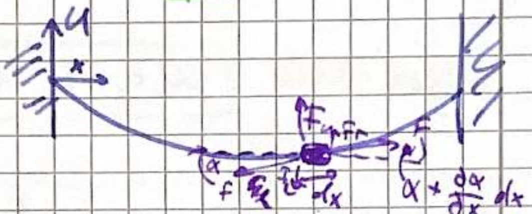
Welle auf Gummiseil

Spannkraft = $\boxed{F = \sigma \cdot A}$ ← Q-Fläche
σ: Spannung

Kraft auf Seilstück der Masse $dm = \rho \cdot A \cdot dx$

$$F_u = F_r - F_e \approx F\left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx\right) - F\alpha$$
(kleine α)

$$F_u = F \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$



Beschleunigt das Seilstück $dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_u = F \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$

$$= F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{F\,dx}{dm} = \frac{\sigma A\,dx}{\rho A\,dx} = \frac{\sigma}{\rho}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F \cdot dx}{dm} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rightarrow \text{Ausl.}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$$\frac{1}{c^2} \rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}}$$

Stehende Welle

Welle am Ende reflektiert ← Ende fest eingespannt
→ Knoten $(u(t) = 0)$
→ Welle um $180° = \pi$ phasenverschoben reflektiert

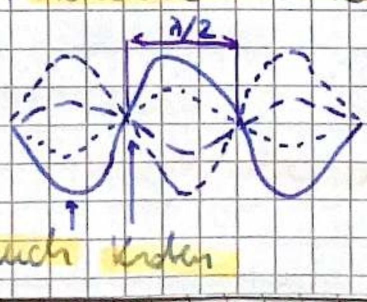
$$u = u_e + u_r = u_0 \cdot \sin(\omega t + kx) + u_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$\boxed{u(t,x) = \underbrace{2u_0 \cdot \cos(kx)}_{\text{Amplitude am Ort } x} \cdot \sin(\omega t)}$$

→ stehende Welle

$$\boxed{f_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}} \qquad f_n = n \cdot f_1$$

$n = 1$: Grundfrequenz



Wellen III

2D: Oberflächenwellen (z.B. Wasserwelle)

3D: Raumwellen (z.B. Schall- u. EM-Wellen)

Quelle
- linienförmig → ebene Welle
- punktförmig → Kreiswelle

Phasenflächen: gerade Linien (2D) → Ebenen (3D)

Kreise → Kugeln

Ebene Welle: $\boxed{u(t,x,y,z) = u_0 \cdot \sin(\omega t - kx)}$

Phasenflächen → const

Kugelwelle: $\boxed{u(t,r) = \underbrace{u_{max}(r)}_{\frac{u_0}{r}} \cdot \sin(\underbrace{\omega t - kr}_{})}$

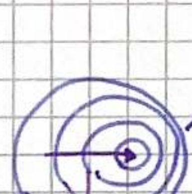
konzentrische Phasenflächen → const

$\boxed{\text{Energie} \sim (\text{Amplitude})^2}$

$\boxed{u_{max}^2(r) \cdot r^2 = const}$

$\boxed{u_{max}(r) = \frac{u_0}{r}}$

Doppler-Effekt:



höhere Frequenz

$\lambda = \lambda_0 - v_Q \cdot T_0$

$\lambda = \lambda_0 - \frac{v_Q}{f_0}$

$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_Q}{c}\right)$

niedrigere Frequenz

bewegte Quelle v_Q emittiert f_0

$v_Q < 0$

$\boxed{f = f_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{v_Q}{c}}\right)}$

$v_Q > 0$

oder bewegter Empfänger

$\boxed{f = f_0 \left(1 + \frac{v_E}{c}\right)}$

$v_E > 0$ Annäherung

$v_E < 0$ Entfernung

$\boxed{f = f_0 \left(\frac{1 + v_E/c}{1 - v_Q/c}\right)}$

(Überschallflugzeug)

$v_Q > c$

Machscher Kegel